web : http://koenig-damien.jimdo.com
e-mail : damien.koenig@esisar.grenoble-inp.fr

## TD2 : RECHERCHE DE L'EQUILIBRE, STABILITE BO ET REPONSE TEMPORELLE

Ex1) On considère le système décrit par le schéma suivant :

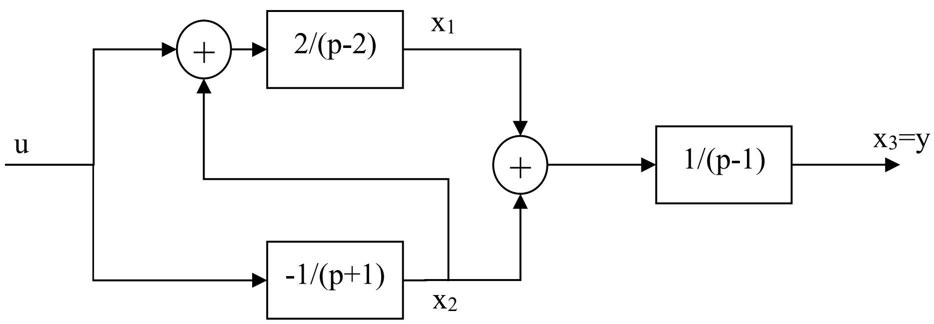



Figure 1. Schéma-bloc du processus.

***1. Représentation d'état.***

*Donner la représentation d'état du système, est-il stable?*

***2. Fonction de transfert.***

*Donner la fonction de transfert,* H(p)=Y(p)/U(p)

***3. Commandabilté***

*Le système est-il complètement commmandable ?*

## Ex2 : Point d'équilibre et Stabilité BO

On considère trois populations habitant un éco - système : les chasseurs, les lapins et les renards. Des études sur les dix dernières années, alors que la chasse au renard était interdite, ont permis d'écrire les équations suivantes, où l'on note respectivement x(t), y(t) et z(t) les niveaux de ces populations à l'instant t (les temps sont exprimés en années - saisons de chasse) :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ay - bx\\ \dot{y} &= 10 + \alpha y - \beta x - 20\gamma z\\ \dot{z} &= \delta(y - 20z)\end{aligned} \qquad (1)$$

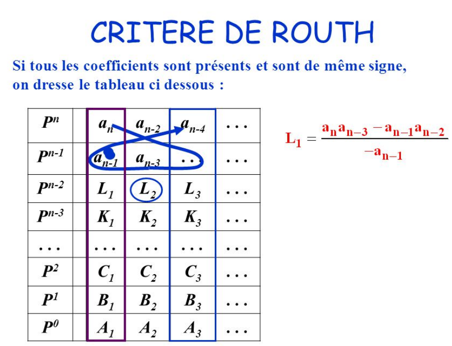
où tous les paramètres sont > 0.

A la suite d'études statistiques on sait avec une bonne précision que : $a = 1/10$, $b = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$ et $\gamma = 1$.

On revanche, le paramètre concernant les renards, $\delta$ est inconnu, excepté que l'on sait que $\delta \in ]0, 2]$. On sait par ailleurs qu'il y a actuellement que 2 chasseurs, 10 lapins et 4 maigres renard.

a) Après avoir brièvement interprété les équations ("plus il y a de lapins, plus il y a de chasseurs", etc), déterminer le point d'équilibre de ce système, pour $a = 1/10$, $b = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$ et $\delta \in ]0, 2]$.

b) Cet équilibre dépend-il de $\delta$?



c) Sa stabilité en dépend-elle?

d) Que conclure dans les cas $\delta = 1/20$ et $\delta = 2$?

## Ex3 : Réponse temporelle

**Système :**

$$\underline{\dot{x}} = \begin{pmatrix} -3/2 & 3/2 \\ 1/6 & -3/2 \end{pmatrix}\underline{x} + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}u$$
$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\underline{x}$$
$$\underline{x}(0) = 0$$

**Problème :** Rechercher l'évolution y(t) sachant que l'entrée u est un échelon unité.

Première étape : Calcul de $e^{At}$ par transformée de Laplace inverse

On détermine directement la matrice d'évolution $\Phi(t)$ par l'inverse de la transformation de Laplace :

$$\Phi(t) = e^{At} = L^{-1}\left[(pI - A)^{-1}\right]$$

**Aide 1 :** Décomposition en éléments simples

$$L^{-1}\left[\frac{p+\frac{3}{2}}{(p+1)(p+2)}\right] = \frac{a}{p+1} + \frac{b}{p+2} \quad \text{et} \quad L^{-1}\left[\frac{\alpha}{(p+1)(p+2)}\right] = \alpha\left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2}\right) \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{1}{6}; = \frac{3}{2}$$

**Aide 2 :** Sachant que

$$\underline{x}(t) = e^{At}\underline{x}(0) + \int_{\tau=0}^{t} e^{A(t-\tau)}B\underline{u}(\tau)d\tau$$
$$\underline{y}(t) = C\underline{x}(t)$$

Et que les conditions initiales sont nulles et C et B présentent un 0, la sortie y se réduit au calcul suivant :

$$y(t) = \int_0^t 6\Phi_{21}(t-\tau)d\tau \quad \text{où} \quad \Phi(t-\tau) = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(t-\tau) & \Phi_{12}(t-\tau) \\ \Phi_{21}(t-\tau) & \Phi_{22}(t-\tau) \end{pmatrix}$$

**Aide 3 :**

Calcule de l'intégrale :

$$y(t) = \int_{\tau=0}^{\tau=t} \left(e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}\right)d\tau$$

Changement de variable $t-\tau = v$, on obtient :

$$y(t) = \int_{v=0}^{v=t} \left(e^{-v} - e^{-2v}\right)dv = \left[-e^{-v}\right]_0^t - \left[-\frac{e^{-v}}{2}\right]_0^t = \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}$$

$$y(0) = 0 \quad \text{et} \quad y(t \to \infty) = \frac{1}{2}$$

Il existe une autre solution pour déterminer l'exponentielle de matrice. Elle est basée sur le changement de base dans l'espace des valeurs propres et vecteurs propres.