ESISAR $5^{ème}$ ANNEE D'ETUDES

Département : AUTOMATIQUE

Auteur: Damien KOENIG

Module AC 560 Commande Robuste

TP 1 : ETUDE DE STABILITE D'UN SYSTEME PAR RESOLUTION LMI ET SYNTHESE H∞ A PONDERATION FREQUENTIELLE

PARTIE A : STABILITE D'UN SYSTEME

On se propose ici d'appliquer le théorème de Lyapunov pour prouver la stabilité

- ❖ d'un système autonome (1)
- ❖ d'un système incertain autonome (2)

On considère par la suite que les systèmes (1) et (2) sont commandés, déterminer alors les conditions LMI telles que

- ❖ le système (1) présente une boucle fermée stable au sens de Lypunov.
- ❖ le système incertain (2) présente une boucle fermée stable au sens de Lypunov.

PARTIE B : INTRODUCTION A LA COMMANDE PAR SYNTHESE H∞ A PONDERATION FREQUENTIELLE D'UN SYSTEME DU PREMIER ORDRE

1 PARTIE A : STABILITE D'UN SYSTEME

1.1 Stabilité d'un système autonome.

On considère le système

$$\dot{x} = A_i x \tag{1}$$

où i=1, 2, $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Rechercher l'inégalité matricielle linéaire (LMI) telle que (1) est stable, montrer pour A_1 qu'il existe une solution positive alors que pour A_2 il n'en existe pas.

Exemple d'écriture

```
setlmis([]);   % ouverture de la procédure de construction de la LMI

S=lmivar(1,[n,1]);  % déclaration de S en précisant sa taille nxn
lmiterm([1, 1, 1, S], A', eye(2),'s');    % LMI #1: A'*S+S*A
lmiterm([-2, 1, 1, S], eye(2), eye(2)); % LMI #2: 0<S => cela impose que X soit définie positive
lmicont=getlmis;     % fermeture de la procédure de construction de la LMI
[ob,val]=feasp(lmicont,[0 1000 1e6 10 0], -0.01); % résolution de la LMI
S=dec2mat(lmicont,val,S);   % récupère et assigne à S la solution obtenue
```

1.2 Stabilité d'un système incertain.

La problématique générale de l'analyse robuste peut s'énoncer comme suit. Etant donnée une modélisation incertaine et une loi de commande associée, il s'agit d'établir si cette loi de commande garantit la stabilité et un certain niveau de performance de la boucle de contreréaction pour toute réalisation du modèle dans son ensemble d'incertitude.

Nous allons illustrer cela, sur l'analyse de stabilité robuste d'un polytope de matrices. Soit le modèle autonome incertain linéaire à temps invariant :

$$\dot{x} = Ax$$

où

$$A = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i A^{[N]} \quad \lambda_i > 0 \quad \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1$$

$$A \in \mathcal{A} = co\left\{A^{[1]}, \cdots, A^{[N]}\right\}$$

La matrice dynamique A n'est pas précisément connue mais est supposée appartenir à un polytope de matrices A. Toute réalisation A de la matrice dynamique peut s'exprimer comme une combinaison linéaire convexe des N matrices sommets A[1], …, A[N].

En théorie de la commande robuste il convient de tester la stabilité quadratique du polytope de matrices qui est une condition suffisante pour la stabilité robuste.

Théorème : Si

$$\exists\, P > \mathbf{0} \mid A_i' P + P A_i < \mathbf{0} \qquad \forall\, i = 1, \cdots, N$$

$$alors\ \dot{x} = Ax \quad est\ stable\ \forall\ A \in \mathcal{A} = co\left\{A^{[1]}, \cdots, A^{[N]}\right\}.$$

Application : On considère le système incertain

$$\dot{x} = Ax \tag{2}$$

où A est une matrice incertaine comprise dans un polytope $P_A = \left\{A^{[1]}, A^{[2]}, A^{[3]}\right\}$ avec

$$A^{[1]} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}; \quad A^{[2]} = \begin{pmatrix} -0.8 & 1.5 \\ 1.3 & -2.7 \end{pmatrix}; \quad A^{[3]} = \begin{pmatrix} -1.4 & 0.9 \\ 0.7 & -2 \end{pmatrix}$$

Donner les 3 LMI's solution du problème de stabilité robuste et montrer qu'il existe une solution commune P définie positive telle que le Théorème soit vrai. **Remarque** : Il est possible de réduire le conservatisme introduit par une fonction de lyapunov commune en proposant une relaxation plus fine à l'aide d'une fonction de Lypunov polytopique et du lemme d'élimination.

1.3 Commande par résolution LMI

On considère le système

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{3}$$

où $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1) Poser A= A+γ_0I et déterminer le correcteur statique u=Kx, tel que les valeurs propres de A+BK soient à gauche de -γ_0 avec γ_0 >0.
2) Déterminer par résolution LMI un correcteur statique u=+Kx qui fixe les modes entre –h_1 et –h_2 avec h_1 et h_2 tous deux positifs. 2) Pour -h_1=-2 et -h_2=-1.5 la résolution LMI n'a pas de solution alors que pour -h_1=-1.5 et -h_2=-0.5 des solutions existent, pourquoi ?

1.4 Commande robuste d'un système incertain par résolution LMI

On considère le système

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{3}$$

Où $B = (0 \quad 1)^T$ et A est une matrice incertaine comprise dans un polytope $P_A = \{A_1, A_2, A_3\}$ avec

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} -0.8 & 1.5 \\ 1.3 & -2.7 \end{pmatrix}; \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1.4 & 0.9 \\ 0.7 & -2 \end{pmatrix}.$$

Donner les conditions LMI's telle qu'un gain statique u=Kx assure une stabilité robuste du système bouclé. On donnera K solution du problème LMI's.

2 PARTIE B : INTRODUCTION A LA COMMANDE PAR SYNTHESE H∞ A PONDERATION FREQUENTIELLE

Objectif : Assurer le suivi de consigne d'un procédé du premier ordre en assurant à priori les objectifs de performance énoncés dans le cahier des charges.

Problème : On considère le système de fonction de transfert $G(p) = \frac{1}{p+2}$. On demande de déterminer par retour de sortie le correcteur K assurant les performances suivantes :

1. BP : $\omega_c = 2 rd/s$
2. Marge de module : 0.5
3. Gain entre la référence et la commande inférieure à 1.5 pour tout w
4. Suivi de consigne avec une erreur statique inférieure à 2%

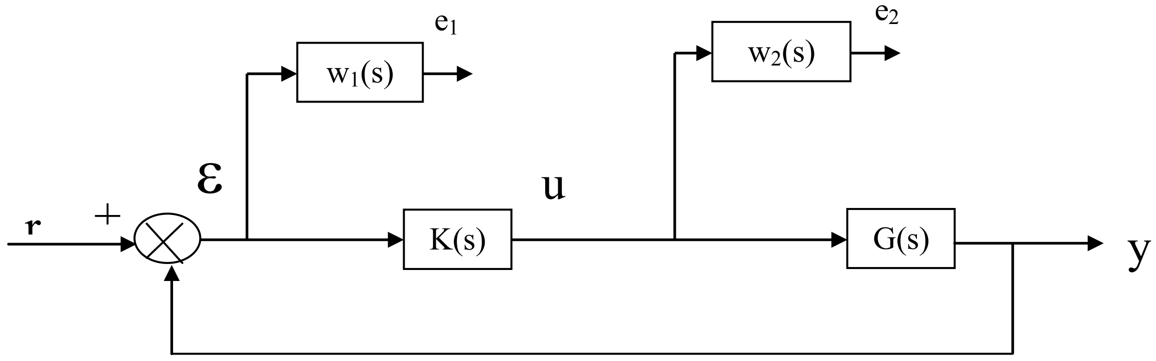


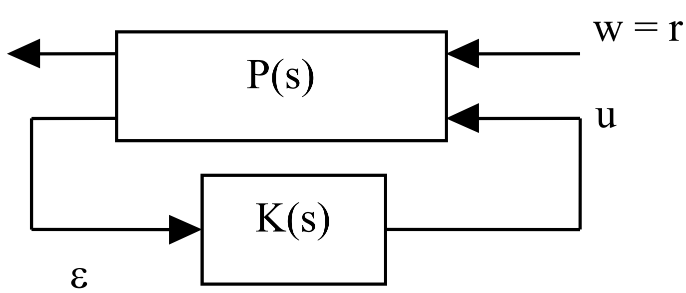
Figure 1 : Boucle de régulation + filtres de pondération

2.1 Donner les gabarits w_1 et w_2 et tracer le bode des fonctions $1/w_1$ et $1/w_2$

2.2 Déduire les représentations d'états associés aux filtres w_1 et w_2

2.3 Mettre la figure (1) sous la représentation standard du problème de synthèse Hinfini, i.e., et en déduire la représentation d'état du système augmenté P(s) (état procédé G(s) + état filtre W_1(s))

$$P(s) := \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ?\,? \\ ?\,? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ?\,? \\ ?\,? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ u \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ?\,? \\ ?\,? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ?\,? \\ ?\,? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ u \end{pmatrix} \\ \varepsilon = (?\,?) \begin{pmatrix} x \\ x_1 \end{pmatrix} + r \end{cases} \qquad z = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$



2.4 Vérifier que le système augmenté P(s) est observable et commandable

2.5 Déterminer le correcteur dynamique K solution du problème H_∞, pour cela on appliquera la fonction hinflmi

[gopt, K] = hinflmi(P,r)

où r=[dim(y) dim(u)] et P et une réalisation

gopt est le gama optimal solution du pb (doit être proche de 1 sinon modifier $_{W2}$)

K est la réalisation du correcteur K solution du pb

2.5.1. Vérifier les fonctions de sensibilité r (consigne) sur e_2 et r (consigne) sur e_1,

```
figure(1);
splot(ssub(clsys,1,2),'bo'); % bode de r (consigne) sur e2
figure(2);
splot(ssub(clsys,1,1),'st'); % bode de r (consigne) sur e1
```

2.6 Ayant déterminé le correcteur dynamique K solution du problème H_∞, transformer la réalisation K en système i.e. K(s) et tracer

2.6.1. les valeurs singulières de la fonction de sensibilité : S= 1/(1+KG)

2.6.2. les valeurs singulières de la fonction complémentaire : T=I - S

2.6.3. les valeurs singulières du transfert de boucle : KG

2.6.4. le bode du contrôleur : K

2.7 Conclure

Quelques fonctions utiles :

ltisys transforme une représentation d'état en une réalisation

ltiss transforme une réalisation en une représentation d'état

slft donne la boucle fermée des 2 réalisations ex clsys=slft(P,K);

roots : retourne les racines d'un polynôme

voir également : lsys, splot, ssub